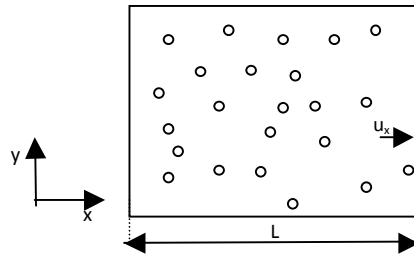


## Modello di meccanica statistica del comportamento di sfere rigide elastiche con moto randomico

Le ipotesi alla base della seguente trattazione sono:

- Sfere di dimensioni molto contenute (molto minori del contenitore e molto più piccole della distanza percorsa in seguito a due urti successivi (cammino libero medio molecolare) da ciò nasce la definizione del numero di Knudsen come rapporto tra la dimensione della singola sfera e il cammino libero medio molecolare)
- Moto caotico (descrivibile da equazioni ma molto sensibile alle condizioni al contorno)



Consideriamo un recipiente chiuso contenente un numero elevato di particelle. Si vuole valutare il valore della pressione che si esercita su una delle pareti del recipiente. Per perseguire questo obiettivo consideriamo l'impulso (forza per unità di tempo) che una particella impartisce sulla parete quando vi urta. Sappiamo infatti dal th. dell'impulso che l'impulso di una particella sulla parete è pari alla variazione della sua quantità di moto.

La particella giunge sulla parete con una certa velocità. La componente rilevante ai fini della valutazione dell'impulso è quella perpendicolare alla parete che denominiamo  $u_x$ . Essendo l'urto perfettamente elastico, la particella abbandonerà la parete in seguito all'urto con una velocità  $-u_x$  uguale e opposta poiché l'energia cinetica deve conservarsi. Se la particella ha massa  $m$ , la variazione della sua quantità di moto  $\Delta q$  sarà:

$$\Delta q = (-mu_x - mu_x) = -2mu_x = |2mu_x| \quad \text{Impulso della particella sulla parete}$$

Se vogliamo conoscere la forza che la particella imprime sulla parete, dobbiamo valutare il numero di urti che la particella esercita sulla parete nell'unità di tempo. Il numero di urti è direttamente proporzionale alla velocità  $u_x$  e inversamente proporzionale alla lunghezza del contenitore  $L$  e varrà:

$$N_{\text{urti}} = \frac{u_x}{2L}$$

Moltiplicando l'impulso  $\Delta q$  per  $N_{\text{urti}}$  si ottiene la forza che la particella esercita sulla parete, ovvero:

$$F = \Delta q * N_{\text{urti}} = 2mu_x \frac{u_x}{2L} = \frac{mu_x^2}{L} \quad \text{Forza della particella sulla parete}$$

Volendo valutare la forza che tutte le particelle esercitano sulla superficie si dovrà eseguire la sommatoria estesa a tutte le particelle presenti nel contenitore. Si ha:

$$F_{\text{parete}} = \sum_i F_i = \sum_i \frac{mu_x^2}{L} \quad \text{Forza di tutte le particelle sulla parete}$$

Se ipotizziamo che tutte le particelle abbiano la stessa massa  $m$  ma non necessariamente la stessa velocità la relazione può essere riscritta nel modo seguente:

$$F_{\text{parete}} = \frac{m}{L} \sum_i u_{xi}^2$$

Definendo:

$$u_{x\ m}^2 = \frac{1}{N} \sum_i u_{xi}^2$$

quale *media quadratica delle velocità delle particelle* dove  $N$  rappresenta il numero di molecole presenti nel contenitore, otteniamo:

$$F_{\text{parete}} = \frac{m}{L} N u_{x\ m}^2$$

La pressione esercitata sulla parete, se ipotizziamo che il contenitore abbia dimensioni cubiche, sarà:

$$p = \frac{F_{\text{parete}}}{L^2} = \frac{m}{L^3} N u_{x\ m}^2$$

Da ciò si ottiene:

$$pV = Nm u_{x\ m}^2$$

dove  $V = L^3$  è proprio il volume del contenitore. Se chiamiamo  $c$  il modulo della velocità della particella, sappiamo che:

$$c^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$$

lo stesso può essere scritto anche per le velocità medie, si ha:

$$c_m^2 = u_{x\ m}^2 + u_{y\ m}^2 + u_{z\ m}^2$$

Essendo il moto randomico ne deriva che:

$$u_{x\ m}^2 = u_{y\ m}^2 = u_{z\ m}^2$$

allora:

$$c_m^2 = 3 u_{x\ m}^2$$

ovvero:

$$u_{x\ m}^2 = \frac{1}{3} c_m^2$$

I sistemi per i quali vale questa ipotesi si dicono *ergotici* ovvero la descrizione dell'insieme di particelle è analogo all'evoluzione della singola particella.

Si ha allora:

$$pV = Nm \frac{1}{3} c_m^2 \quad (1)$$

Definiamo l'energia cinetica media di una singola particella:

$$K_{em} = \frac{1}{2} m c_m^2 \quad \text{Energia cinetica media di una singola particella}$$

e inoltre definiamo:

$$K_{em} = \frac{1}{2} N_0 m c_m^2 = \frac{1}{2} M c_m^2 \quad \text{Energia cinetica media di un numero di Avogadro di particelle}$$

con  $N_0$  Numero di Avogadro =  $6.022 \cdot 10^{23} \frac{\text{particelle}}{\text{mole}}$  e  $M = N_0 m$ .

Sapendo che  $N = nN_0$  con  $n$  numero di moli e sostituendo nella (1) si ha:

$$pV = Nm \frac{1}{3} c_m^2 = \frac{1}{3} nN_0 m c_m^2 = \frac{1}{3} nM c_m^2$$

Moltiplichiamo e dividiamo per 2. Si ha:

$$pV = \frac{2}{3} n \frac{1}{2} M c_m^2 = \frac{2}{3} n K_{em}$$

Ma per un gas ideale si ha:

$$pV = nR_0T$$

Eguagliando le due relazioni si ha:

$$nR_0T = \frac{2}{3} n K_{em} \implies R_0T = \frac{2}{3} K_{em} \implies K_{em} = \frac{3}{2} R_0T \quad (2)$$

Quest' ultima relazione ci dice come ogni componente della velocità contribuisce a  $K_{em}$  con un termine  $(1/2)R_0T$ . Inoltre questa relazione suggerisce anche una interpretazione della temperatura come misura dell'energia cinetica media di un numero di Avogadro di particelle. Infatti:

$$T = \left( \frac{2}{3} K_{em} \right) / R_0$$

Dividendo primo e secondo membro della (2) per  $N_0$  si ha:

$$\frac{1}{N_0} K_{em} = \frac{3}{2} R_0T \frac{1}{N_0}$$

Definiamo

$$k = \frac{R_0}{N_0} \quad \text{Costante di Boltzmann}$$

Se  $R_0 = 8,314 \frac{J}{Kmol}$  e  $N_0 = 6.022 \cdot 10^{23} \frac{\text{particelle}}{\text{mole}}$  allora:

$$k = 1,3 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$$

k rappresenta la costante universale riferita alla singola molecola.

Nel modello è necessaria la conoscenza della distribuzione delle velocità. Per perseguire questo obiettivo si ricorre al principio dell'equidistribuzione dell'energia di Boltzmann. L'energia cinetica delle particelle presenti nel contenitore è misurata, come detto, dalla temperatura. Si suppone di realizzare tante categorie di energie cinetiche, individuando per ogni categoria il numero di particelle che vi appartengono. Questo principio porta a concludere che il contributo all'energia cinetica media di ogni singola categoria è sempre lo stesso indipendentemente dal numero di particelle che vi appartengono. Da ciò discende che le categorie a valori bassi di energia cinetica saranno molto popolate di particelle, viceversa accade per le categorie a valori elevati dell'energia cinetica. Quindi al limite per energia cinetica nulla si avrà un numero di particelle tendenzialmente infinito mentre per energia cinetica infinita si avrà un numero di particelle che tende a zero con un andamento iperbolico. Questo principio può essere riferito a ogni singola componente di velocità e si manifesta attraverso la *probability density function (pdf)*. Ad esempio per la componente  $u_x$  si ha:

$$\text{pdf}(u_x) = A \exp\left(-\frac{mu_x^2}{2kT}\right)$$

dove A è una costante generica, k è la costante di Boltzmann.

La pdf( $u_x$ ) è definita come:

$$\text{pdf}(u_x) = \frac{1}{N} \frac{dN_{u_x}}{du_x}$$

dove  $N_{u_x}$  rappresenta il numero di particelle avente velocità  $u_x$ .